KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI, PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Peminatan

KELAS XII

LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI
MATEMATIKA PEMINATAN
KELAS XII

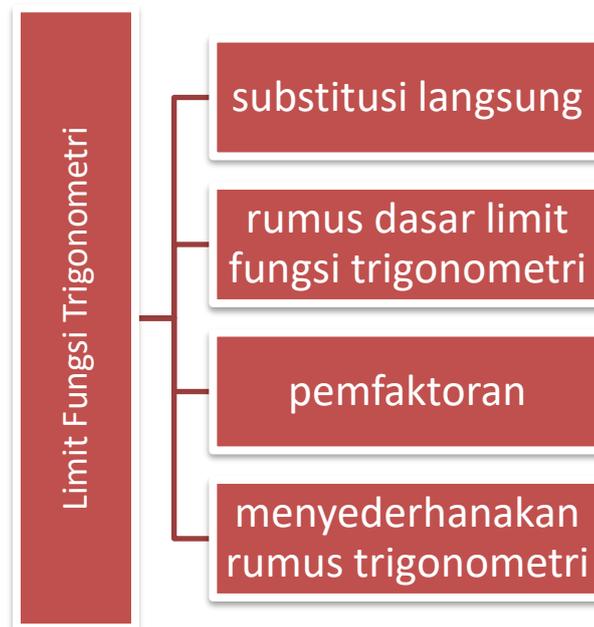
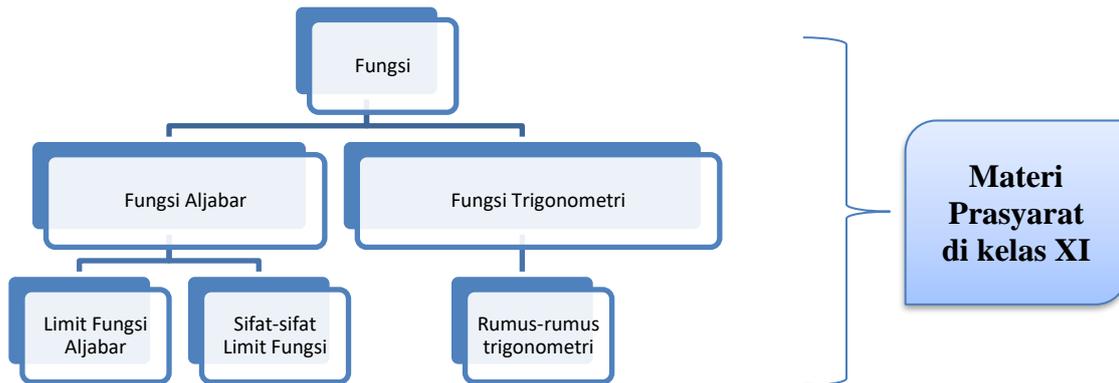
PENYUSUN
Yuyun Sri Yuniarti
SMA Negeri 1 Pedes

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

- **Limit**; nilai pendekatan di sekitar titik tertentu baik pendekatan dari kiri suatu titik maupun pendekatan dari kanan titik tersebut.
- **Metode Substitusi**; menentukan nilai limit dengan mensubstitusi langsung batas limit ke dalam limit fungsi untuk limit tidak bentuk tak tentu.
- **Metode pemfaktoran**; menentukan limit bentuk tidak tentu dengan memfaktorkan pembilang dan atau penyebut agar dapat dilakukan metode substitusi.

PETA KONSEP

Ananda tercinta, berikut disajikan peta materi untuk konsep limit fungsi trigonometri. Konsep limit fungsi trigonometri tidak lepas dari materi limit fungsi aljabar dan rumus-rumus trigonometrinya. Oleh karena itu kedua materi tersebut merupakan materi prasyarat untuk Ananda dalam memahami, menentukan dan menyelesaikan masalah limit fungsi trigonometri.

PENDAHULUAN

Haloo... Ananda tercinta, salam jumpa kembali pada pembelajaran matematika. Kalian tentu tahu bahwa matematika merupakan ilmu yang dibutuhkan di semua bidang. Bahkan ada seloroh bahwa ketika kita berhenti bermatematik maka berhenti pulalah kehidupan ini. Nahh dalam kehidupan sehari-hari, berbagai permasalahan yang kita hadapi dapat melahirkan berbagai konsep matematika. Berdasarkan konsep umum matematika yang diperoleh dari permasalahan tersebut, kita mampu menyelesaikan kembali permasalahan yang serupa. Sebagai contoh, misalkan kita melakukan pengamatan terhadap respon tubuh yang sedang alergi terhadap suatu zat dengan tingkat dosis obat antibiotik. Dari data yang kita peroleh, kita dapat memodelkan batas dosis pemakaian antibiotik tersebut. Dengan demikian, masalah alergi yang serupa dapat diatasi bila kembali terjadi. Percobaan yang kita lakukan adalah sebuah konsep pendekatan terhadap solusi permasalahan tersebut. Jadi, konsep dapat kita peroleh dengan mengamati, menganalisis data dan menarik kesimpulan.

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Peminatan
Kelas	:	XII
Alokasi Waktu	:	12 JP
Judul Modul	:	Limit Fungsi Trigonometri

B. Kompetensi Dasar

3.1 Menjelaskan dan menentukan limit fungsi trigonometri

4.1 Menyelesaikan masalah berkaitan dengan limit fungsi trigonometri

C. Deskripsi Singkat Materi

Pada pendahuluan, Ananda telah diajak untuk memahami suatu konsep pendekatan pada nilai tertentu. Konsep tersebut merupakan contoh konsep dasar sederhana dari materi limit fungsi dalam kehidupan sehari-hari. Pada pertemuan kali ini kita akan membahas tentang limit fungsi trigonometri.

Di kelas XI Ananda telah belajar tentang limit fungsi aljabar, sedangkan materi yang akan kita bahas dalam modul ini yaitu tentang limit fungsi trigonometri. Ketika mendengar kata trigonometri pasti Ananda ingat bahasan tentang trigonometri di kelas X. Jadi benar apa yang Ananda pikirkan jika materi kali ini berkaitan dengan trigonometri di kelas X dan limit fungsi aljabar di kelas XI. Jika Ananda sedikit lupa tentang kedua hal tersebut, Ananda boleh membuka kembali buku matematika kelas X dan XI dan mengingat kedua konsep tersebut yang telah bapak/ibu guru matematika ajarkan di kelas X dan XI. Jika belum terlalu paham, jangan khawatir, dalam modul pembelajaran mengenai materi limit fungsi trigonometri kita akan belajar perlahan langkah demi langkah secara rinci agar Ananda dapat lebih mudah memahaminya.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Sebelum Ananda mempelajari e-modul ini, Ananda harus memperhatikan petunjuk sebagai berikut:

Petunjuk Umum

- Bacalah modul ini secara berurutan dan pahami isinya.
- Pelajari contoh-contoh penyelesaian permasalahan dengan seksama dengan pemahaman bukan dihapalkan.
- Kerjakan semua tugas-tugas yang ada dalam modul ini agar kompetensi Ananda berkembang sesuai dengan kompetensi yang diharapkan.
- Setiap mempelajari materi, Ananda harus mulai dari menguasai pengetahuan pendukung (uraian materi) melaksanakan tugas-tugas, mengerjakan lembar latihan.
- Dalam mengerjakan lembar latihan, Ananda jangan melihat kunci jawaban terlebih dahulu sebelum Ananda menyelesaikan lembar latihan.
- Kerjakan lembar kerja untuk pembentukan keterampilan sampai Ananda benar-benar terampil sesuai kompetensi.
- Sebelum konsultasi dengan guru ketika menghadapi kesulitan dalam memahami salah satu atau beberapa materi dalam modul ini, cobalah Ananda buka atau browsing literatur atau buka buku-buku referensi lain yang relevan dengan materi dalam modul ini.

Petunjuk Khusus

- Pada kegiatan pembelajaran kali ini Ananda akan mempelajari limit fungsi trigonometri dan rumus dasarnya, serta bagaimana cara mengerjakan limit fungsi trigonometri ini secara praktis dengan menggunakan konsep aljabar yang telah Ananda peroleh sebelumnya sejak SMP dan di kelas XI, serta menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi trigonometri
- Perhatikan dengan seksama setiap konsep dan pahamilah contoh-contoh soal yang diberikan, dengan demikian Ananda dapat mengerjakan soal latihan pada lembar kerja secara sistematis.
- Kerjakanlah soal evaluasi dengan cermat agar Ananda dapat:
    - Menggunakan sifat-sifat limit fungsi dalam menyelesaikan soal-soal yang berkaitan.
    - Menyelesaikan masalah limit fungsi trigonometri.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **2** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Menyelesaikan Limit Fungsi Trigonometri dengan metode substitusi dan rumus dasar limit fungsi trigonometri

Kedua : Menyelesaikan Limit Fungsi Trigonometri dengan menggunakan rumus trigonometri

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
Limit Fungsi Trigonometri 1

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan dapat Menjelaskan arti limit fungsi trigonometri di suatu titik; Menghitung limit fungsi trigonometri di suatu titik dan Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi trigonometri

B. Uraian Materi

Pada pelajaran matematika wajib kelas XI, Ananda telah belajar mengenai definisi limit fungsi aljabar yaitu bahwa suatu limit fungsi f(x) dikatakan mendekati a {f(x), a} sebagai suatu limit. Bila x mendekati a, dinotasikan limit F(x) = L. Cara menyelesaikan limit fungsi aljabar, terdapat 3 cara untuk menyelesaikan limit fungsi aljabar yaitu dengan metode (1) substitusi langsung; (2) pemfaktoran; (3) merasionalkan penyebut. Nahhh semoga Ananda masih mengingat ini yaa...

Pada kegiatan pembelajaran ini Ananda akan belajar bagaimana menyelesaikan limit fungsi trigonometri. Cara menyelesaikan limit fungsi trigonometri dibagi menjadi 4 metode, yaitu (1) dengan metode substitusi langsung; (2) dengan menggunakan rumus dasar limit fungsi trigonometri; (3) dengan metode pemfaktoran; (4) dengan cara menyederhanakan fungsi trigonometrinya. Sebagai materi prasyarat pada bahasan limit fungsi trigonometri selain Ananda harus hapal nilai-nilai sudut istimewa untuk sin, cos, tan dan kebalikannya juga harus hapal rumus-rumus trigonometrinya ya. Jadi Ananda boleh sambil buka buku atau catatan kelas X tentang rumus-rumus trigonometri dan kelas XI tentang limit fungsi aljabar. Okay, sekarang kita lihat satu per satu cara menyelesaikan limit fungsi trigonometri..

1. Metode substitusi langsung

Penerapan metode substitusi langsung dalam menentukan atau menyelesaikan limit fungsi trigonometri sangat mudah, yakni dengan langsung mengganti x dengan angka yang tertera di soal atau

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Perhatikan contoh soal berikut:
Gunakan metode substitusi untuk menentukan nilai Limit fungsi trigonometri berikut ini:

1. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \sin 2x = \sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{2\pi}{4} = \sin 90^0 = 1$
2. $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{4}} \tan 3x + 2 = \tan 3\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 2 = \tan(45^0) + 2 = 1 + 2 = 3$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = \frac{\sin 0}{\sin 0 + \cos 0} = \frac{0}{0+1} = 0$
4. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2\cos 2x} = \frac{1-\cos 2(\frac{\pi}{2})}{2\cos 2(\frac{\pi}{2})} = \frac{1-\cos \pi}{2\cos \pi} = \frac{1-(-1)}{2\,(-1)} = \frac{1+1}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$

Berikut disajikan tabel sudut istimewa yaa biar Ananda gak ribet lagi nihhh.. tapi nanti harus dihapalkan.

	0°	30°	45°	60°	90°
Sinα	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	**1**
Cosα	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$
	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**
Tgα	$\frac{0}{1}$	$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$	$\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$	$\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{0}$
	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	**1**	$\sqrt{3}$	**Tdk terdefinisi**

2. Menggunakan rumus dasar limit fungsi trigonometri

Rumus dasar limit fungsi trigonometri tersebut adalah:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$
5. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$
6. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$
7. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$
8. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$

Perhatikan dengan seksama dan teliti rumus dasar di atas, jika Ananda jeli Ananda akan menemukan pola jawaban rumus tersebut. Sebagai penguat kita simak contoh soal di bawah ini yaa.

Dengan menggunakan rumus limit fungsi trigonometri di atas, tentukan nilai limit fungsi trigonometri berikut:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x} = \frac{2}{3}$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 3x} = \frac{2}{3}$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{3x} = \frac{5}{3}$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\tan 6x} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
5. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\tan 5x} = \frac{2}{5}$
6. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x - \tan 3x}{3x} = \cdots$ *dengan menggunakan sifat dari limit fungsi aljabar yang telah Ananda pelajari di kelas XI, maka soal ini dapat kita pecah menjadi*

$$\lim_{x\to 0}\frac{tan5x}{3x}-\lim_{x\to 0}\frac{tan3x}{3x}=\frac{5}{3}-\frac{3}{3}=\frac{2}{3}$$

Dari keenam contoh soal yang diberikan, ternyata untuk menjawabnya Ananda tinggal menuliskan angka yang tertera di soal aja yaa... Gimana mudah bukan...? Yakin deh 100% Ananda dapat mengikutinya sehingga kita lanjut ke tingkatan berikutnya. Yukk kita simak lagi contoh soal berikutnya.
Tentukan nilai limit fungsi trigonometri berikut ini:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 5x}{3x\tan 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3x}\,.\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\tan 2x}=\frac{1}{3}\,.\frac{5}{2}=\frac{5}{6}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\,sin^2 2x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x.\sin 2x}{3.x.x}$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\,.\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\frac{2}{3}\,.\frac{2}{1}\,.\frac{2}{1}=\frac{8}{3}$$

C. Rangkuman

Cara menyelesaikan limit fungsi trigonometri pada pembelajaran pertama ini dilakukan dengan dua cara yaitu cara substitusi dan pemfaktoran.

1. $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$
2. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{(x-a)f(a)}{(x-a\,)g(a)}$

D. Latihan Soal

Isilah soal dibawah ini dengan benar

1. Nilai dari $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 6x}=\cdots$

2. Nilai dari $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 7x+\tan 3x-\sin 5x}{\tan 9x-\tan 3x-\sin x}=\cdots$

3. Nilai dari $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ adalah ...

4. $\lim_{x\to 0}\frac{sin^3 2x}{tan^3\frac{1}{2}x}=\cdots$

5. Nilai dari $\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+x}{\sin x}=\cdots$

6. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\sin 3x}{\sin 2x\tan 3x}=\cdots$

7. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{a}{b}x}{\tan cx}=\cdots$

Pembahasan

No	Pembahasan	Skoring
1	Penyelesaian Substitusi langsung x = 0 akan menghasilkan bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$. Berdasarkan rumus limit fungsi trigonometri $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$ maka dari soal tersebut diketahui a = 2 dan b = 3 jadi nilai dari $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \frac{2}{3}$	10
2	Penyelesaian Substitusi langsung x = 0 akan menghasilkan bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$. Munculkan bentuk yang sesuai dengan rumus limit fungsi trigonometri yang ada dnegan cara mengalikannya dengan $\frac{1}{x}$. Sehingga diperoleh: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 7x + \tan 3x - \sin 5x}{\tan 9x - \tan 3x - \sin x}.\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan 7x}{x} + \frac{\tan 3x}{x} - \frac{\sin 5x}{x}}{\frac{\tan 9x}{x} - \frac{\tan 3x}{x} - \frac{\sin x}{x}}$ $= \frac{7+3-5}{9-3-1} = \frac{5}{5} = 1$	10
3	Penyelesaian Gunakan rumus trigonometri berikut: $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ Dengan demikian akan diperoleh: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{x-\frac{\pi}{2}}$ $= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{-(\frac{\pi}{2}-x)} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = -1$	10
4	Penyelesaian Substitusi langsung akan menghasilkan bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$. Berdasarkan rumus limit fungsi trigonometri untuk $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$ maka dari soal diketahui a = 2 dan b = ½ sehingga diperoleh: $\lim_{x\to 0}\frac{sin^3 2x}{tan^3 \frac{1}{2}x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{\tan\frac{1}{2}x}\right)^3 = \left(\frac{2}{\frac{1}{2}}\right)^3 = 4^3 = 64$	10
5	Penyelesaian Substitusi langsung akan menghasilkan bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$ Langkah selanjutnya adalah dengan emlakukan pemisahan pecahan menjadi dua suku. Lalu munculkan bentuk yang sesuai dengan rumus trigonometri yang ada.	10

No	Pembahasan	Skoring
	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2+x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{\sin x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$ $=\lim\limits_{x\to 0}2x\frac{x}{\sin x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$ $=\lim\limits_{x\to 0}2x\,.\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=2(0)(1)+1=0+1=1$	
6	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x\sin 3x}{\sin 2x\tan 3x}=\frac{2}{2}.\frac{3}{3}=1$	10
7	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{a}{b}x}{\tan cx}=\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{b}.\frac{1}{c}=\frac{a}{bc}$	10
TOTAL SKOR		70

E. Penilaian Diri

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda mampu memahami cara menentukan limit fungsi trigonometri? ?		
2.	Apakah Ananda telah mampu menyelesaikan limit fungsi trigonometri dengan substitusi?		
3.	Apakah Ananda mampu menyelesaikan limit fungsi trigonometri dengan menggunakan rumus dasar trigonometri?		

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
Limit Fungsi Trigonometri 2

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan dapat menghitung limit fungsi trigonometri di suatu titik dengan menggunakan rumus dasar trigonometri dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi trigonometri

B. Uraian Materi

Pada pembelajaran kali ini, Ananda akan belajar bagaimana cara menghitung limit fungsi trigonometri. Cara menghitungnya kita akan gunakan rumus dasar trigonometri dan penyederhanaan rumus-rumusnya.

1) Menggunakan metode pemfaktoran

Untuk metode pemfaktoran konsepnya sama persis dengan metode pemfaktoran dalam limit fungsi aljabar yang telah Ananda pelajari di kelas XI. Metode pemfaktoran dilakukan ketika Ananda menemukan jawaban dengan bentuk tak tentu atau $\frac{0}{0}$, nahh artinya di sini Ananda harus melakukan pemfaktoran. Trik metode pemfaktoran adalah Ananda harus membuang si pembuat nol dalam fungsi tersebut. Sebagai contoh, perhatikan soal di bawah ini.

Tentukan nilai limit berikut:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x^2+2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x(x+2)} = \left[\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\right].\left[\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{(x+2)}\right] = \frac{1}{1}.\frac{1}{0+2} = 1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

   faktorkan

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)(2x+3)}{x^2+4x-5} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)(2x+3)}{(x-1)(x+5)} = \left[\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{(x-1)}\right].\left[\lim\limits_{x\to 1}\frac{(2x+3)}{(x+5)}\right] = 1.\frac{2(1)+3}{(1+5)} = \frac{5}{6}$

   Sifat-sifat limit

$$\lim_{x\to 1}\frac{\tan(x-1)\sin(1-\sqrt{x})}{x^2-2x+1}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{\tan(x-1)\sin(1-\sqrt{x})}{(x-1)(x-1)}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{\tan(x-1)}{(x-1)}.\lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-\sqrt{x})}{(x-1)}$$
$$= 1.\lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-\sqrt{x})}{-(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}$$
$$= -1.\lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})}.\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1+\sqrt{x})} = -1.1.\frac{1}{1+\sqrt{1}} = -1.1.\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

2) Menyederhanakan Fungsi Trigonometrinya

Untuk dapat mengerjakan soal limit fungsi trigonometri seperti ini, mengharuskan Ananda buka kembali rumus-rumus trigonometrinya. Agar lebih efektif yuk simak contoh soalnya.

Tentukan nilai limit fungsi berikut ini:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x \sin x} =$

Jika Ananda mensubstitusi x dengan 0 maka akan didapat bentuk tak tentu atau $\frac{0}{0}$. Dalam hal ini Ananda harus merubah cos x menjadi fungsi lain.

Ingat Kembali rumus:
$\cos 2x = cos^2 x - sin^2 x$
$\cos x = cos^2 \frac{1}{2}x - sin^2 \frac{1}{2}x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(cos^2 \frac{1}{2}x - sin^2 \frac{1}{2}x)}{2x \sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1-cos^2 \frac{1}{2}x) + sin^2 \frac{1}{2}x}{2x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{sin^2 \frac{1}{2}x + sin^2 \frac{1}{2}x}{2x \sin x}$$

Ingat Kembali rumus:
$cos^2 x + sin^2 x = 1$
Maka $sin^2 x = 1 - cos^2 x$
$sin^2 \frac{1}{2}x = 1 - cos^2 \frac{1}{2}x$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2sin^2 \frac{1}{2}x}{2x \sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2sin \frac{1}{2}x . sin \frac{1}{2}x}{2x \sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2 \, sin \frac{1}{2}x}{2x} . \lim_{x\to 0} \frac{sin \frac{1}{2}x}{sinx} = \frac{2.\frac{1}{2}}{2} . \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{4}$$

2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{cos^2 x - sin^2 x}{\cos x - \sin x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{(\cos x - \sin x)} =$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \cos x + \sin x = cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Bagaimana dengan contoh soal tersebut? Ananda sudah mulai paham kan cara mengerjakannya? Agar lebih matang, Ananda kembali ingat rumus-rumus trigonometrinya yaa... nihhh di bawah ini disajikan beberapa rumus trigonometri untuk Ananda.

Berikut ini merupakan kumpulan rumus dasar trigonometri. Ananda tinggal menyesuaikan sudut yang diminta dari soal yang diberikan seperti contoh soal di atas.

Identitas Trigonometri

1. $sin^2 x + cos^2 x = 1$
2. $sin^2 x = 1 - cos^2 x$
3. $cos^2 x = 1 - sin^2 x$
4. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
5. $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
6. $\sec x = \frac{1}{\cos x}$
7. $\csc x = \frac{1}{\sin x}$
8. $sec^2 = tan^2 x + 1$
9. $csc^2 x = cot^2 x + 1$

Rumus Trigonometri

1. $\sin(\alpha+\beta) = sin\alpha \, cos\beta + cos\alpha \, sin\beta$
2. $\sin(\alpha-\beta) = sin\alpha \, cos\beta - cos\alpha \, sin\beta$
3. $\cos(\alpha+\beta) = cos\alpha \, cos\beta - sin\alpha \, sin\beta$
4. $\cos(\alpha-\beta) = cos\alpha \, cos\beta + sin\alpha \, sin\beta$
5. $\tan(\alpha+\beta) = \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 - tan\alpha \, tan\beta}$
6. $\tan(\alpha-\beta) = \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 + tan\alpha \, tan\beta}$
7. $sin 2\alpha = 2 \, sin \, \alpha \cos \alpha$
8. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
   $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
   $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$
9. $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-tan^2\alpha}$
10. $sin^2\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha$
11. $cos^2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha$
12. $sin 3\alpha = 3 \, sin \, \alpha - 4\sin^3 \alpha$
13. $cos \, 3\alpha = 4 \, cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
14. $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$
15. $2\cos\alpha \sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$
16. $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$
17. $-2\sin\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)$
18. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \, cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
19. $\sin\alpha - \sin\beta = 2cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \, \sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
20. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \, cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
21. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \, sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

C. Rangkuman

Pada pembelajaran ini Ananda diharapkan dapat mengingat rumus-rumus trigonometri di bawah ini agar ketika menyelesaikan limit fungsi trigonometri yang mengharuskan mengganti, atau menyederhanakan dengan rumus trigonometri, Ananda dapat lancar mengerjakannya.

Identitas Trigonometri

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
3. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
4. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
5. $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
6. $\sec x = \frac{1}{\cos x}$
7. $\csc x = \frac{1}{\sin x}$
8. $\sec^2 = \tan^2 x + 1$
9. $\csc^2 x = \cot^2 x + 1$

Rumus Trigonometri

1. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$
2. $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$
3. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$
4. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$
5. $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$
6. $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$
7. $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$
8. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

   $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

   $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$
9. $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$
10. $\sin^2\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha$
11. $\cos^2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha$
12. $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$
13. $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
14. $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$
15. $2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$
16. $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$
17. $-2\sin\alpha\cos\beta = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$
18. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
19. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
20. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
21. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

D. Latihan Soal

Kerjakan soal untuk mengukur kemampuan pemahaman konsep Ananda terhadap materi limit fungsi trigonometri berikut ini:

1. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2-4} = \cdots$
2. Nilai dari $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = \cdots$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x \tan\frac{1}{2}x} = \cdots$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(3x-\pi)\cos 2x}{\sin(3x-\pi)} = \cdots$
5. Nilai dari $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\tan(x-1)\sin(1-\sqrt{x})}{x^2-2x+1} = \cdots$

Pembahasan

No	Pembahasan	Skoring
1	Penyelesaian $\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{\sin(x-2)}{(x-2)(x+2)}}{= \lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2\,)}{(x-2\,)}} . \lim_{x\to 2}\frac{1}{(\,x+2)}$ $= 1\,.\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$	10
2	Penyelesaian $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$ $= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x - \sin x}{cos^2x - \ sin^2x}$ $= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x - \sin x)}{(\cos x - \sin x)\ (\cos x + \sin x)}$ $= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x - \sin x}{\cos x - \sin x}\,.\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x + \sin x} = 1\,.\frac{1}{cos\frac{\pi}{4} + sin\frac{\pi}{4}}$ $= \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	10
3	Penyelesaian $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan(3x-\ \pi)\cos 2x}{\sin(3x-\ \pi)}$ $= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan(3x-\ \pi)}{\sin(3x-\ \pi)}.\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos 2x$ $= 1.\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos 2x = 1.\cos 2(\frac{\pi}{3})$ $= \cos 120 = -\ \frac{1}{2}$	10
4	Penyelesaian $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\tan\frac{1}{2}\ x} = \lim_{x\to 0}\frac{2sin^2x}{x\tan\frac{1}{2}\ x}$ $= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x.\sin x}{x\tan\frac{1}{2}\ x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x}\ .\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan\frac{1}{2}x}$ $= 2\,.\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\,.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan\frac{1}{2}x}$ $= 2\,.\,1\,.\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.1.2 = 4$	10

5	$\lim_{x \to 1} \frac{\tan(x-1)\sin(1-\sqrt{x})}{x^2-2x+1}$ $= \lim_{x \to 1} \frac{\tan(x-1)\sin(1-\sqrt{x})}{(x-1)(x-1)}$ $= \lim_{x \to 1} \frac{\tan(x-1)}{(x-1)} . \lim_{x \to 1} \frac{\sin(1-\sqrt{x})}{(x-1)}$ $= 1 . \lim_{x \to 1} \frac{-\sin(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$ $= -1 . 1. \frac{1}{\sqrt{1}+1} = -\frac{1}{2}$	10
TOTAL SKOR		50

E. Penilaian Diri

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda mampu memahami cara menentukan limit fungsi trigonometri dengan menggunakan rumus trigonometri?		
2.	Apakah Ananda telah mampu menyelesaikan limit fungsi trigonometri dengan pemfaktoran?		
3.	Apakah Ananda mampu menyelesaikan limit fungsi trigonometri dengan menggunakan penyederhanaan rumus trigonometri?		

EVALUASI

Pilih satu jawaban yang paling tepat!

1. Nilai dari $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 5x}{6x}=\cdots$

A. 2
B. 1
C. $\frac{1}{2}$
D. $\frac{1}{3}$
E. -1

2. Nilai dari $\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-3x+2}=\cdots$

A. $-\frac{1}{2}$
B. $-\frac{1}{3}$
C. 0
D. $\frac{1}{2}$
E. 1

3. Nilai dari $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 12x}{2x\,(x^2+2x-3\,)}=\cdots$

A. – 4
B. -3
C. -2
D. 2
E. 6

4. Nilai dari $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x\sin 3x}{5x}=\cdots$

A. $\frac{5}{3}$
B. 1
C. $\frac{5}{2}$
D. $\frac{1}{5}$
E. 0

5. Nilai dari $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\cdots$

A. – 8
B. – 4
C. 2
D. 4
D. 4
E. 8

6. Nilai dari $\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-1\,)\sin 6x}{x^3+3x^2+2x}=\cdots$

A. – 3
B. – 2
C. 2
D. 3
E. 5

7. Nilai dari $\lim_{x\to 1}\frac{\sin\left(1-\frac{1}{x}\right)\cos(1-\frac{1}{x})}{x-1}=\cdots$

A. – 1
B. $-\frac{1}{2}$
C. 0
D. $\frac{1}{2}$
E. 1

8. Nilai dari $\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-5x+6)\sin(x-2)}{(x^2-x-2)^2}=\cdots$

A. $\frac{1}{3}$
B. $\frac{1}{5}$
D. $-\frac{1}{9}$
E. $-\frac{1}{3}$

C. 0

9. Nilai dari $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = \cdots$

A. $\frac{1}{4}\sqrt{2}$

B. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

C. $\sqrt{2}$

D. $2\sqrt{2}$

E. $3\sqrt{2}$

10. Nilai dari $\lim_{x\to 0} \frac{x \tan x}{1-\cos 2x} = \cdots$

A. $-\frac{1}{2}$

B. 0

C. $\frac{1}{2}$

D. 1

E. 2

12. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x^2+2x} = \cdots$

A. 2

B. 1

C. 0

D. $\frac{1}{2}$

E. $-\frac{1}{2}$

13. $\lim_{x\to 0} \frac{sin^3\ 2x}{tan^3 \frac{1}{2}x} = \cdots$

A. 2^3

B. 2^4

C. 2^5

D. 2^6

E. 2^7

14. $\lim_{x\to 0} \frac{2\ sin^2\ 2x}{3x \tan 3x} = \cdots$

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{8}{3}$

D. $\frac{8}{9}$

E. $\frac{8}{6}$

15. $\lim_{x\to -3} \frac{x^2+6x+9}{2-2\ c0s\ (2x+6)} = \cdots$

A. 3

B. 1

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{3}$

E. $\frac{1}{4}$

16. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{x \tan 2x} = \cdots$

A. – 4

B. – 2

C. 4

D. 6

E. 8

17. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \sin\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}} = \cdots$
   A. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
   B. $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
   C. $\sqrt{3}$
   D. $-2\sqrt{3}$
   E. $-3\sqrt{3}$

18. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{6x \tan 2x}{1 - \cos 6x} = \cdots$
   A. $\frac{1}{3}$
   B. $\frac{2}{3}$
   C. 1
   D. 2
   E. 3

19. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)\ cos\ (\pi x - 2\pi)}{\tan(2\pi x - 4\pi)} = \cdots$
   A. 2π
   B. π
   C. 0
   D. $\frac{1}{\pi}$
   E. $\frac{1}{2\pi}$

20. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{4}\pi} \frac{\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}}{x - \frac{1}{4}\pi} = \cdots$
   A. $-2\sqrt{2}$
   B. $-\sqrt{2}$
   C. 0
   D. $\sqrt{2}$
   E. $2\sqrt{2}$

KUNCI JAWABAN

1. B
2. E
3. C
4. C
5. E
6. A
7. E
8. D
9. C
10. C
11. D
12. D
13. D
14. D
15. E
16. D
17. C
18. B
19. E
20. A

DAFTAR PUSTAKA

Erlangga Fokus UN SMA/MA 2013 Program IPA. (2012). Jakarta: Erlangga.
Erlangga X-Press UN 2015 SMA/MA Program IPA. (2014). Jakarta: Erlangga.
Matematika Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan (2014). Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.
Siswanto. (2005). Matematika Inovatif: Konsep dan Aplikasinya. Solo: Tiga Serangkai Pustaka Mandiri.
Willa Adrian. (2008). 1700 Bank Soal Bimbingan Pemantapan Matematika Dasar. Bandung: Yrama Widya.